

## Matematika – 11. és 12. évfolyam

### matematika – 11. évfolyam

*Idézet a Matematika-K – alap órás számú kerettantervből [NAT 2020] (11–12. évfolyam, bevezetés):*

*„A középfokú képzés során a matematika tanulása-tanítása tekintetében az egyik legfontosabb feladat a tanuló önálló, rendszerezett, logikus gondolkodásának kialakítása, fejlesztése. A 9. évfolyamtól kezdve a spirális felépítésnek megfelelően – a korábbi képzési szakaszok során megszerzett készségekre, képességekre és ismeretekre alapozva – egyre absztraktabb formában épül fel a matematika belső struktúrája (fogalmak definíciója, tételek, bizonyítások).”*

*[...] a 9–12. évfolyamokon fokozatosan hangsúlyosabbá válik a matematika deduktív jellege. Az új fogalmakat, algoritmusokat, ismereteket viszont továbbra is induktív módon, szemléltetéssel, felfedeztetéssel, tanulói tevékenységekre építve, a valósághoz kapcsolva kell bevezetni.*

*Jól megválasztott problémák tárgyalása során válik a tanulók számára is szükségessé az új fogalmak bevezetése és pontos definiálása. Tanári irányítással a tételek, általános összefüggések is felfedeztetők a tanulókkal. Ezen folyamat során fejlődik a tanulók szintetizáló és modellalkotó képessége. A felfedezett tételek és összefüggések egy része bizonyítás nélkül is gyarapítja a matematikai eszköztárat. Néhány tétel bizonyítása azonban elengedhetetlen része a matematika tanításának, hiszen a bizonyításokon keresztül mutatható meg a matematika logikus és következetes felépítése. [...] A matematikai játékok, logikai feladványok fejlesztik a stratégiaalkotást, az algoritmikus gondolkodást, a kreativitást és a gondolkodás rugalmasságát.*

*A matematika a maga hagyományos és modern eszközeivel segítséget ad a természettudományok, az informatika, a technika és a humán tanulási területek ismeretanyagának tanulmányozásához, a mindennapi problémák, a természeti és a gazdasági folyamatok értelmezéséhez és kezeléséhez. Ehhez – több más fogalom mellett – szükséges a függvény fogalmának változatos (nemcsak számhalmazokon értelmezett) példák mentén történő kiterjesztése. A tanuló a matematika szaknyelvét érti és tudatosan használja. Életkorának megfelelő matematikai, matematikatörténeti szöveget képes önállóan olvasni, értelmezni. Mind írásban, mind szóban képes gondolatait a matematika szaknyelvének szabatos alkalmazásával közölni. A tanuló különböző forrásokat (tankönyv, függvénytáblázat, saját jegyzet, digitális források) használhat az órákon és a számonkérések alkalmával, bizonyos tételek, azonosságok, képletek felidézésére.*

*A tanuló társaival közösen tervez és hajt végre kooperatív tevékenységeket, projekteket. A közös munkában érvel, képes a vitára, az érvei ütköztetésére. Mérlegeli és kontrollálja mind a társai, mind a saját véleményét. Ebben az életkorban is érvényesülnie kell a tanuló érdeklődésének, adottságának, absztrakciós szintjének megfelelő differenciálásnak. Ez a differenciálás jelentheti a NAT-ban leírt tananyagtartalmaknak a lehetőségekhez igazított bővítését is.*

*A tanuló digitális eszközöket, a tanulást, a szemléltetést, a tapasztalatszerzést és a felfedezést segítő szoftvereket, digitális információforrásokat használ, a matematika alkalmazását segítő számítógépes programokat ismer meg. Aktív résztvevője a tanulási-tanítási folyamatnak, ami lehetővé teszi azon kompetenciáinak és tervezési stratégiáinak a fejlődését, amelyek segítik a mai gyorsan változó világban való eligazodást és a különböző élethelyzetekben előforduló problémák megoldását.*

*A matematika tantárgy a Nemzeti alaptantervben rögzített kulcskompetenciákat fejleszti”*

### **11–12. évfolyam**

*„A 11–12. évfolyamon a tanulási-tanítási folyamatra jellemző, hogy az ismeretek jellege egyre absztraktabb és formálisabb, a matematika belső logikája egyre jobban érvényesül. Ebben a szakaszban az egyik nagyon fontos didaktikai cél a szimbolikus gondolkodás fejlesztése. A tanulóknak a korábban elsajátított készségekre, képességekre és ismeretanyagra támaszkodva kell eljutniuk az absztrakt összefüggések megértéséhez és tudatos alkalmazásához. Tudatosítani kell a matematikai fogalmak pontos definiálásának fontosságát és a matematikai bizonyítások szerepét. Amellett, hogy a lehetséges alkalmazásokat minden egyes témakör kapcsán szem előtt kell tartani, fontos, hogy a tanulók lássák az egyes matematikai területek kapcsolatát is.*

*Ebben a szakaszban is fontos cél, hogy az ismeretszerzési folyamat során a tanuló a tanár által irányított módon, a feladatok megoldása mentén maga fedezze fel az összefüggéseket, általánosítási lehetőségeket, megoldási módokat. A kooperatív munkaformák, a csoportmunkában megoldandó projektfeladatok ebben a szakaszban is fejlesztik a matematikai kommunikációt. Az érettségi vizsgára készülés során egyre nagyobb hangsúlyt kap a tanulók önálló munkája mind a feladatmegoldásokban, mind a tanultak ismétlésében, rendszerezésében. A digitális eszközök, dinamikus szoftverek, online felületek támogatják a szemléltetést, a megértést, a felfedeztetést és a gyakorlást.*

*A 11–12. évfolyamon is jellemző, hogy a megjelenő témakörök tartalmának egy része folytatása, kiterjesztése és kiegészítése a korábbi szakaszokban is megjelenő tananyagtartalmaknak. Bizonyos témakörök azonban ebben a szakaszban jelennek meg először. Ilyen a racionális kitevőjű hatvány, az exponenciális függvény, a logaritmus, a számtani és mértani sorozatok, a trigonometria, a koordinátageometria és a térgeometria. Vannak olyan témakörök, amelyek ismeretei megjelennek más terület tanítása során is, ezért az egyes részekhez javasolt óraszámok ebben a szakaszban sem jellemeznék feltétlenül időben összefüggő egységet. Az algebrai eszközök és a függvényekkel kapcsolatos ismeretek bővülése, a trigonometria és a koordinátageometria alapjainak megjelenése, valamint a statisztikai és valószínűségi szemlélet mélyülése további lehetőségeket nyújt változatos hétköznapi és matematikai problémák megoldására. A matematikai eszköztár bővülése ebben a szakaszban teszi leginkább lehetővé, hogy a tanulók más tantárgyakban, más tanulási területeken is alkalmazni tudják matematikai tudásukat.”*

A 11. évfolyamon jellemző, hogy a megjelenő témakörök tartalmának egy része folytatása, kiterjesztése és kiegészítése a korábbi szakaszokban is megjelenő tananyagtartalmaknak. Bizonyos témakörök azonban ebben a szakaszban jelennek meg először. Ilyen a racionális kitevőjű hatvány, az exponenciális függvény, a logaritmus, a trigonometria, a koordinátageometria. Vannak olyan témakörök, amelyek ismeretei megjelennek más terület tanítása során is, ezért ebben a szakaszban nem jelentenek feltétlenül időben összefüggő egységet. Az algebrai eszközök és a függvényekkel kapcsolatos ismeretek bővülése, a trigonometria és a koordinátageometria alapjainak megjelenése, valamint a statisztikai és valószínűségi szemlélet mélyülése további lehetőségeket nyújt változatos hétköznapi és matematikai problémák megoldására. A matematikai eszköztár bővülése ebben a szakaszban teszi leginkább lehetővé, hogy más tantárgyakban, más tanulási területeken is alkalmazni tudják a tanulók matematikai tudásukat.

A tananyag feldolgozása során érdemes figyelembe vennünk a 11. évfolyam sajátosságait.

Néhány példa:

– az új témaköröket ismétlésre is felhasználhatjuk (a függvények és statisztika tárgyalása lehetőséget ad az alapvető függvényfogalmak felelevenítésére, a szögfüggvények témakör pedig az elemi geometriai ismeretek bővítésére.)

– Kiemelt szerepet kapnak azoknak az optimumproblémáknak, amelyek gazdasági kérdésekkel foglalkoznak, amikor költség, kiadás minimumát; elérhető eredmény, bevétel maximumát keressük. Fokozatosan vezetjük be a pénzügyi fogalmakat: bevétel, kiadás, haszon, kölcsön, kamat, értékcsökkenés, -növekedés, törlesztés, futamidő stb.

– minden életkori szakaszban fontos a differenciálás. Ez nem csak az egyéni igények figyelembevételét jelenti. Egyrészt az alkalmazhatóság, más esetekben a tudományos igényesség szintje szerinti differenciálás szükséges.

– a tematikus összefoglalás során törekszünk a különálló (már átismételt) anyagrészek szintézisére, például összetett feladatok kitűzésével.

A tanórákon több kompetenciaterület fejlesztésére is sor kerül, a természettudományos, a matematikai, az anyanyelvi kompetenciákra. A feladatok értelmezése, a szövegértést fejleszti, s azok megoldása nem lehetségesek logikus gondolkodás nélkül. A felmerülő problémák pedig több tudományterületet ölelhetnek át.

### **Az egyes témakörök alapfeladatai:**

#### **I. félév**

##### **Hatvány, gyök és logaritmus**

A hatványok és gyökök ismételése, a racionális kitevőjű hatvány bevezetése. A logaritmus fogalma és azonosságai, alkalmazások. Az exponenciális és logaritmusfüggvény és tulajdonságai, invertálás, inverz függvény. Exponenciális és logaritmikus egyenletek, egyenlőtlenségek, ezek alkalmazása szöveges problémák megoldásakor. Exponenciálisan változó mennyiségek vizsgálata a természetben és a társadalomban.

##### **Szögfüggvények**

A hasonló alakzatok tulajdonságainak ismételése. A szögfüggvények értelmezése és elemi összefüggéseik.

A szögfüggvények alkalmazása elemi geometriai feladatokban és szöveges feladatokban távolságok és szögek meghatározására. Szögfüggvények kiterjesztése, trigonometrikus alapfüggvények és tulajdonságaik.

#### **II. félév**

##### **Trigonometria**

A szinusz és koszinusz tétel, a terület trigonometrikus kiszámítása. Az általános háromszögek adatainak meghatározása, alkalmazások sokszögek esetében. Szöveges trigonometriai problémák megoldása. Trigonometrikus egyenletek megoldása. Trigonometrikus függvények ábrázolása, transzformálása és jellemzése, egyenlőtlenségek.

##### **Vektorok és koordináta-geometria**

Szabad és helyvektorok, vektorműveletek. Vektorok és vektorműveletek koordinátákkal felírva. Az egyenes analitikus megadása, merőleges és párhuzamos egyenesek. Egyenesek metszéspontja. Különböző feladatok egyenesekkel. A kör analitikus felírása, kör és egyenes, két kör kölcsönös helyzete. Érintők használata.

**Kombinatorika, valószínűség és gráfok** Kombinatorikus modellek alkalmazása, a kombinatorikus valószínűség. Mintavételi eljárások leírása, mintavételek valószínűsége. A gráfelmélet alapjainak megismerése konkrét problémákon keresztül.

##### **Év végi ismételés**

A tanult ismeretek felidézése elsősorban a kétszintű érettségi feladatrendszerében előforduló problémákon keresztül.

### **matematika – 12. évfolyam**

*Idézet a 3.2.04. kerettantervből [NAT 2012] (11–12. évfolyam, bevezetés):*

„Ez a szakasz az érettségire felkészítés időszaka is, ezért a fejlesztésnek kiemelten fontos tényezője az elemző- és összegző képesség alakítása. Ebben a két évfolyamban áttekintését adjuk a korábbi évek ismereteinek,

eljárásainak, problémamegoldó módszereinek, emellett sok, gyakorlati területen széles körben használható tudást is közvetítünk. [...] Az érettségi előtt már elvárható többféle ismeret együttes alkalmazása. [...]

Minden témában nagy hangsúllyal ki kell térnünk a gyakorlati alkalmazásokra, az ismeretek más tantárgyakban való felhasználhatóságára. [...] Gyakran alkalmazhatjuk a digitális technikát az adatok, problémák gyűjtéséhez, a véletlen jelenségek vizsgálatához. [...]"

A tematika elsősorban a középszintű érettségi vizsgához tartalmazza a tananyagot. A tanított osztály összetételétől, típusától, érdeklődési körétől, az egyes tanulók képességétől, motivációjától függően kis mértékben eltérhetünk tananyag mélységében és szerkezetében. Érdeklődőbb gyerekekkel az olvasmányokat is elemezhetjük (ezek egy részét a diákok akár önállóan is feldolgozhatják), és erősebb csoportban egyes emelt szintű részeket is megemlíthetünk az órákon.

A tananyag feldolgozása során érdemes figyelembe vennünk a 12. év sajátosságait (év végi összefoglalás, felkészülés az érettségi vizsgára).

Néhány példa:

– az új témaköröket ismétlésre is felhasználhatjuk (a logika keretén belül kitűzhetünk kombinatorika példákat; a sorozatok tárgyalása lehetőséget ad az alapvető függvényfogalmak felelevenítésére; vagy a térgeometria során átismételhetjük szinte a teljes síkgeometriát;

– a tematikus összefoglalás során törekedjünk a különálló (már átismételt) anyagrészek szintézisére, például összetett feladatok kitűzésével;

– és feltétlenül szánjunk elegendő időt az érettségi vizsgára való felkészülésre (formai és tartalmi követelmények, módszertani javaslatok).

A tanórákon több kompetenciaterület fejlesztésére is sor kerül, a természettudományos, a matematikai, az anyanyelvi, pénzügyi kompetenciákra. A feladatok értelmezése, a szövegértést fejleszti, s azok megoldása nem lehetségesek logikus gondolkodás nélkül. A felmerülő problémák pedig több tudományterületet ölelhetnek át.

Ahol lehetőség kínálkozik, ott – elsősorban a fakultációs képzésben részt vevő tanulók támogatására – kiegészítő tartalmakként emelt szintű elméleti és gyakorlati problémákat is előtérbe helyezhetünk.

### **Az egyes témakörök alapfeladatai:**

#### **I. félév**

##### **I. Sorozatok**

**A sorozat fogalma, megadási módjai, rekurzió. A függvény-tulajdonságok leszűkítése sorozatokra. A számtani és mértani sorozat általános tagja és összegképlete. A kamatos kamat és különböző banki konstrukciók vizsgálata. Szöveges problémák megoldása sorozatok segítségével, kiemelten a népesedés, veszélyeztetettség témákban. A számtani és mértani sorozatok összekapcsolása.**

##### **Térgeometria**

**Ponthalmazok a térben, alakzatok távolsága és szöge a térben. Síkmetszet és kiválasztása. Felszín és térfogatfogalom kialakítása. Hasábok, hengerek, gúla és kúpok, poliéderek származtatása, tulajdonságaik, felszínük és térfogatuk. A gömb és részei. Csonka testek tulajdonságainak vizsgálata. Testek egymásba írása. Fontos feladat a térszemlélet folytonos fejlesztése különböző testek egymás**

utáni bevezetésével. Össze kell kapcsolódnia a tér- és síkgeometria fogalmainak és számolási eljárásainak.

## **II. félév**

### **Statisztika, kombinatorika, valószínűség és gráfok**

A statisztikai adatok rendszerezése, ábrázolása. Grafikonok készítése és elemzése. Kombinatorikus modellek alkalmazása, a kombinatorikus valószínűség. Mintavételi eljárások leírása, mintavételek valószínűsége. A gráfelmélet alapjainak megismerése konkrét problémákon keresztül.

### **Rendszerező ismétlés**

A tanult ismeretek rendszerező felidézése elsősorban a kétszintű érettségi középszintű feladatrendszerében előforduló feladatokon keresztül.

A matematikai logika és a Bool-algebra alapvető fogalmai, elemi alkalmazásai, a logikai műveletek tudatos használata minden témakörben megjelenik mind fogalmi, mind alkalmazási szinten különböző hétköznapi problémákon keresztül.